



序

東日本大地震が発生した。4年以内に震度7クラスの地震が都内で起こる確率が70%になると東京大学地震研究所の平田直教授から発表された。東日本大地震以降 M5クラスの地震発生頻度が東日本大地震発生前に比べて、高くなった(気象庁 http://www.seisvol.kishou.go.jp/eq/2011_03_11_tohoku/aftershock/)。

斯かる状況下、振動制御装置、免震装置などの研究も盛んに行われているようである。斯かる発明を担当する弁理士を多いであろう。当該発明を処理するに当たって、振動解析の基礎知識が必要となる。

そこで、振動制御に必要な振動解析のために必要な基本的な知識を記載した。行列の偏微分方程式を見ただけでアレルギーを起こす人もいるかもしれないが、要は固有値問題である。仕事をする上で参考になれば幸甚である。

なお、本稿は、当初英文で作成したものを和訳したものである。

1. 1 自由度系 (Single Degree Of Freedom System)

Fig.1に示す1自由度系(“S.D.O.F.”)を考える。

ダランベールの原理による運動方程式は、

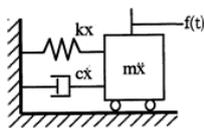


Fig. 1

(1) 運動方程式

$f(t) = P \cdot \text{Re}(e^{i\omega t})$ $f(t)$ の物体への作用は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \cdot \text{Re}(e^{i\omega t})$$

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{P}{m} \cdot \text{Re}(e^{i\omega t})$$

ω_0 : 固有円振動数

β : 減衰定数

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

(2) 応答

一般解 x は、

$$x = x_h + x_p$$

X_h : 一般解, X_p : 特解

$$x_h = e^{-\beta\omega_0 t} (a_1 \cos\omega_d t + a_2 \sin\omega_d t), \quad \omega_d = \sqrt{1 - \beta^2} \omega_0 \text{ in case of } \beta \leq 1.$$

X_p を、 $x_p(t) = Ae^{i\omega t}$ と仮定し、 X_p を方程式(1)に代入する。

$$A = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega_0\omega)} = H(i\omega)$$

$H(i\omega)$: 複素周波数レスポンス関数

$$A = |H(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

ここで、 $\varphi(\omega) = -\text{Arg}H(i\omega)$ が位相シフトであるため、

$$x_p(t) = |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \varphi(\omega))} = \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2i\beta\omega_0\omega)^2}} e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}$$

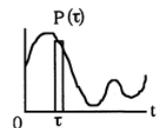
$$\therefore x = e^{-\beta\omega_0 t} (a_1 \cos\omega_d t + a_2 \sin\omega_d t) + \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2i\beta\omega_0\omega)^2}} e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}$$

過渡的な力(Transient force)に対する応答

上記外力は周期力である。過渡的な力(transient force)の場合、 x は次のように示され、これは“単位レスポンス関数(unit response function)”と呼ばれている。

$$x = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\beta\omega_0 t} \sin\omega_d t$$

$$x_p = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\beta\omega_0(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$



$$\therefore x = e^{-\beta\omega_0 t} (a_1 \cos\omega_d t + a_2 \sin\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\beta\omega_0(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau) d\tau$$

これをデュアメル積分という。

2. 多自由度系 (multi degree of freedom system)

次に、多自由度系振動方程式の導き方をラグランジアン方程式に基づき記載する。

(1) ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} - Q_i = 0 \quad i=1,2,3,4,5,\dots$$

をラグランジュ方程式という。

$$L = T - V$$

T: 運動エネルギー, V: ポテンシャルエネルギー, F: 散逸関数, Q: 外力

$$\text{なので, } T = m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2, \quad V = k_i X_i^2, \quad F = C_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$

となる。これをラグランジュ方程式に代入して解くと、各振動系で、1. (1) の新藤方程式が得られ、これらを纏めるとマトリクスで簡単に表すことが出来る。

(2) マトリクスによる振動方程式

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \vdots \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix} \quad n \times n$$

M: 質量マトリクス, C: 減衰マトリクス, K: 剛性マトリクス, F: 外力マトリクス
とすれば (対角行列, 正方行列),

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = f(t) \quad (1)$$

となる。

(3) モーダル解析

モーダル解析によって、上記振動方程式を解くことが可能である。

まず最初に、上記行列式から減衰マトリクスと外力マトリクスとを除いて (実際の構造物の場合、減水マトリクスの振動系に与える影響は小さい。それ故、昨今話題の長周期地震動波により構造物は長時間振動するのである),

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (2)$$

方程式 (2) の解を仮定し、

$$X = \phi e^{i\omega t} \quad (3)$$

方程式 (3) を (2) に代入すると

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (4)$$

有意な解が存在するためには $\phi \neq 0$ であるから、

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (5)$$

det: determinant: 行列式

方程式 (5) を満たす ω は、固有円振動数 (数学の分野における“固有値”) であり、 ω に対応する ϕ は固有振動数モード (数学の分野における“固有ベクトル”) である。高校の線形代数

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n$
ω_1 : 1st natural frequency
ω_2 : 2nd
\vdots
ω_n : nth

で習った固有値問題である。

n 自由度系における方程式 (5) を解くことにより、ナンバーが (n) の ω を導くことが出来る。 ω はそれぞれ、各振動系ごとに異なっている。つまり、各振動系の固有振動数である。

解 ω_i を方程式 (2) に代入し、

$$K\phi - \omega_i^2 M\phi = 0 \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (6)$$

これによって

$$\phi = \phi_i, \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

直行性に従って、

$$\phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (7)$$

実際に手で解くのも簡単で、(6) の方程式で添え字 i, j のものも作り、それぞれの各項に、 $t \phi_j$ (t: 転置の意), $t \phi_i$ をかけて、各項を転置にして解いたものを、前記 $t \phi_j$, $t \phi_i$ を掛けた式から引いてやれば、(7) が出てくる。すっきりするので、酒を飲みながらでもやってみてください。

方程式 (1) の解を、次に示す。

まず、方程式 (1) の解を、

$$X = \Phi \eta(t) \quad (8)$$

と仮定する。

Φ はモードマトリクスであり、これは次の方程式によって得ることができる。

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} : n \times n \text{ matrix} \quad (9)$$

マトリクス Φ のそれぞれの列は、それぞれの固有振動モードとして、新しく構成されている。

方程式 (8) を方程式 (1) に代入する

$$M\Phi\ddot{\eta} + K\Phi\eta = F \quad (10)$$

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = \Phi^T F \quad (11)$$

$$\Phi^T M \Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T M [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_1^T M \phi_1 & \phi_1^T M \phi_2 & \dots & \phi_1^T M \phi_n \\ \phi_2^T M \phi_1 & \phi_2^T M \phi_2 & \dots & \phi_2^T M \phi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_n^T M \phi_1 & \phi_n^T M \phi_2 & \dots & \phi_n^T M \phi_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

直行性に起因し、非対称の要素はすべて 0 である。

それゆえ、

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T M \phi_1 & & & \\ & \phi_2^T M \phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_n^T M \phi_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

同様に,

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T K \phi_1 & & \\ & \phi_2^T K \phi_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \phi_n^T K \phi_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

なぜなら

$$\phi_i^T K \phi_i = \omega_i^2 \phi_i^T M \phi_i, \quad (15)$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \phi_1^T M \phi_1 & & \\ & \omega_2^2 \phi_2^T M \phi_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \phi_n^T M \phi_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

であるため、従って、

$$\begin{bmatrix} \phi_1^T M \phi_1 & & \\ & \phi_2^T M \phi_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \phi_n^T M \phi_n \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} \omega_1^2 \phi_1^T M \phi_1 & & \\ & \omega_2^2 \phi_2^T M \phi_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \phi_n^T M \phi_n \end{bmatrix} \eta = \Phi^T F \quad (17)$$

方程式 (17) は二次微分方程式 (10) が非結合方程式に変換されることを意味する。これは、モード解析での最も特徴的である。

微分方程式を解いて、

$$\phi_i^T M \phi_i \eta_i + \omega_i^2 \phi_i^T M \phi_i \eta_i = \phi_i^T F \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (18)$$

解 η_i を方程式 (15) に代入して、解 X を得ることができる。

減衰マトリクスを考察する場合、もし減衰マトリクスが次のように対照的であったら、

$$\Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\beta_1 \omega_1, 2\beta_2 \omega_2, \dots, 2\beta_n \omega_n) = \begin{bmatrix} 2\beta_1 \omega_1 & & \\ & 2\beta_2 \omega_2 & \\ & & \ddots \\ & & & 2\beta_n \omega_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

モード解析が適用できる。実際の解析においては、 β_i を仮定して方程式 (19) を導くことができる。

モード解析は、上記のように、理論上は対象的で、振動特性を考慮している間に、同時に解が得られるものである。しかし、適用できるのは、線形の M.D.O.F. の系のみである。減衰が入ると非線形になって解くには試行錯誤する。

なお、2 自由度系なら減衰項があっても解くことができる。上述の通り、建設物では減衰項を無視できるので、2 自由度系を割愛した。

3. その他

振動解析に必要なキーワードを以下に掲げる。

(1) フーリエ変換, フーリエ級数, フーリエ積分
約 250 年前にジョセフフーリエが考え出した式。

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega = 2\pi f$$

つまり、時間データを周波数データに変換する方程式。この逆を逆フーリエ変換という。この方程式は、フーリエ積分 (ネットで検索すると出てきます) が全ての周波数に存在することを示している。フーリエ積分は高校で習う三角関数の積分を使えばできます。

$$2\cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta, \quad 2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta,$$

煩雑な三角関数が見事にスパッと消えます。ストレス解消にやってみてください。ヒント: $j = k, j \neq k, 2\pi$

(2) FFT アナライザ

高速フーリエ変換器。例えば構造物を振動台に乗せて、不規則振動を与えて各階の固有振動数を計測する当該計測結果と上記 1, 2 で解いた固有振動数が一致するか実験する時などに使われる。

(3) エルセントロ地震波

実際にアメリカのエルセントロで起きたときの地震波。例えば、前記 (2) で構造物を揺らすときに用いる不規則振動波。

(4) ウェーブレット変換

約 30 年前に土木技師に発案された解析方法に用いられる方程式。平たく言うと、フーリエ変換が時間を周波数に変換するのに対して、ウェーブレット変換は、時間情報も保持する。筆者が大学院に在籍していた頃、出てきた解析方法で、当時は建築物の振動解析にはあまり用いられていなかった。現在、将来は?。

(5) 変数分離形

振動方程式では、以下の式になることがある。

物理学だと波動方程式といい、数学では双曲型偏微分方程式という。これを解くときに用いるのが変数分離法である。

y を x と t の関数として式を作る。

$$y(x,t) = X(x) T(t)$$

y を x で 2 階微分したものと、t で 2 階微分したものとをつくり、上記方程式に代入して整理すれば、例えば右辺が t の関数のみ、左辺 x の関数のみになり、これで変数分離されたことになる。各辺は、任意の定数と等しいとおき (例えば $-k^2$)、解を $T(t) = C e^{i\omega t}$ として、2 階微分して $-k^2$ と等しいとした t の関数に代入す

る。X(x)についても同様。これらを y の式に代入すれば解法は終わり。あとは任意定数に、初期条件等を代入すれば、式が特定される。

以上

参考書

MECHANICAL VIBRATIONS J. P. DEN HARTOG

振動力学演習 Masaru Hoshiya, Toshiyuki Katada

土木振動学 Seima Kotsubo

最新耐震構造学 Akinori Shibata